

# L'estimateur Chao1

Eric Marcon

23 January 2021

# Section 1

## Introduction

# Problématique

Eric Marcon

## Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

Estimer la richesse (le nombre d'espèces) d'un système hyperdivers comme une communauté en forêt tropicale est difficile.

Beaucoup d'espèces sont rares donc un échantillonnage aléatoire (inventaire) de taille raisonnable ne permet pas de les observer.

Des estimateurs de la richesse ont été développés pour estimer la richesse réelle à partir d'un inventaire incomplet.

# Illustration

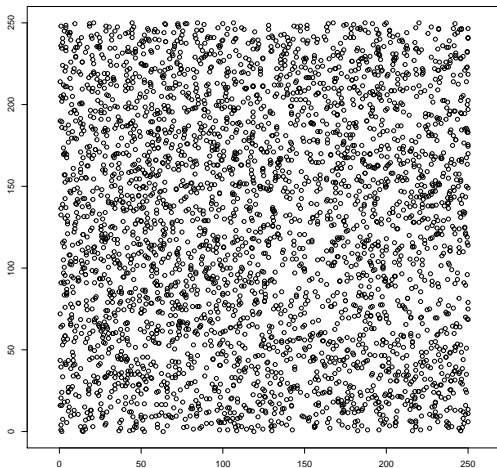
Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

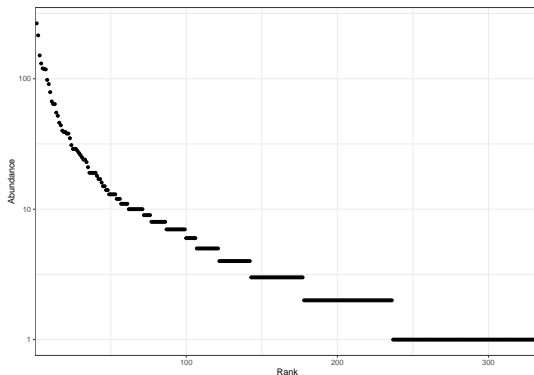
Application

Inventaire d'une  
parcelle de  
Paracou,  
Sinamary, Guyane  
Nombre d'espèces  
observées : 334.  
Espèce la plus  
abondante (wapa :  
*Eperua falcata*) :  
266 individus.



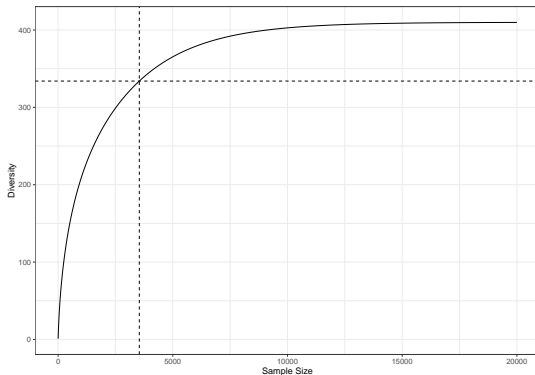
# Illustration

La parcelle est un échantillon de la communauté forestière locale.



Question : combien y a-t-il d'espèces d'arbres dans cette communauté ?

# Courbe d'accumulation



Espérance du nombre d'espèces échantillonnées en fonction de la taille de l'inventaire.

# Estimateur Chao1

Estimateur  
Chao1

Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

Développé par Anne Chao (Chao 2004).

Premier estimateur utilisé largement par les écologues, bon support mathématique.

Intuition :

- les espèces observées une fois auraient pu ne pas l'être.
- lien (à établir) entre les espèces observées un petit nombre de fois et les espèces manquées.

## Section 2

# Construction de l'estimateur



# Notations

Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

Un inventaire de  $n$  individus tirés indépendamment et aléatoirement est réalisé dans une communauté.

Les individus appartiennent à l'espèce  $s$  avec la probabilité  $p_s$ ,  
$$\sum_1^S p_s = 1.$$

L'inventaire manque quelques espèces parmi les moins fréquentes : seules  $s_{obs}$  espèces sont observées.

$s_n^\nu$  est le nombre d'espèces observées  $\nu$  fois dans un échantillon de taille  $n$ . C'est une réalisation de la variable aléatoire  $S_n^\nu$ .

# Observer une espèce

La probabilité qu'un individu inventorié ne soit pas de l'espèce  $s$  est

$$1 - p_s$$

La probabilité de ne pas inclure l'espèce  $s$  dans l'inventaire est

$$(1 - p_s)^n$$

La probabilité d'inclure l'espèce est donc

$$1 - (1 - p_s)^n$$

## Observer une espèce $\nu$ fois

La probabilité d'observer l'espèce  $\nu$  fois avant de ne plus l'observer dans le reste de l'inventaire est  $p_s^\nu (1 - p_s)^{n-\nu}$ .

La probabilité d'observer l'espèce  $\nu$  fois dans l'inventaire est obtenue en prenant en compte l'ordre des observations (combinaisons) :

$$\binom{n}{\nu} p_s^\nu (1 - p_s)^{n-\nu}$$

L'espérance du nombre d'espèces observées  $\nu$  fois est obtenue en sommant cette probabilité sur toutes les espèces

$$\mathbb{E}(S_n^\nu) = \binom{n}{\nu} \sum_s p_s^\nu (1 - p_s)^{n-\nu}$$

# Représentation vectorielle

Soit le vecteur  $\mathbf{v}_\nu$  dans  $\mathbb{R}^S$  dont les coordonnées sont

$$p_s^{\nu/2} (1 - p_s)^{(n-\nu)/2}$$

Le carré de la norme du vecteur  $\mathbf{v}_0$  est

$$\sum_s (1 - p_s)^n,$$

c'est-à-dire  $\mathbb{E}(S_n^0)$ , l'espérance du nombre d'espèces non observées.

(Attention : on ne connaît pas les  $p_s$  !).

# Représentation vectorielle

Eric Marcon

Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

Le carré de la norme du vecteur  $\mathbf{v}_2$  est

$$\sum_s p_s^2 (1 - p_s)^{n-2} = \frac{2}{n(n-1)} \mathbb{E}(S_n^2)$$

Enfin, le produit scalaire  $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 \rangle$  vaut

$$\sum_s p_s (1 - p_s)^{n-1} = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n^1).$$

# Représentation graphique

Soient deux espèces telles que  $p_1 = 0,4$  et  $p_2 = 0,6$ , et  $n = 6$ .

Le vecteur  $\mathbf{v}_0$  a pour coordonnées

$$([1 - 0,4]^3; [1 - 0,6]^3) = (0.216; 0.064)$$

.

Le vecteur  $\mathbf{v}_2$  a pour coordonnées

$$(0,4 \times [1 - 0,4]^2; 0,6 \times [1 - 0,6]^2) = (0.144; 0.096)$$

.

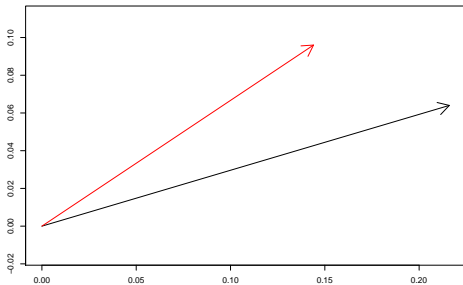
# Représentation graphique

Eric Marcon

Introduction

Construction  
 de l'estimateur

Application



Le vecteur  $\mathbf{v}_0$  dont le carré de la norme est  $\mathbb{E}(S_n^0)$  est en noir.

Le vecteur  $\mathbf{v}_2$  dont le carré de la norme est  $\frac{2}{n(n-1)}\mathbb{E}(S_n^2)$  est en rouge.

# Cauchy-Schwarz

Le produit scalaire est inférieur au produit des normes des vecteurs. La relation reste valide au carré:

$$\left[ \sum_s p_s (1 - p_s)^{n-1} \right]^2 \leq \left[ \sum_s (1 - p_s)^n \right] \left[ \sum_s p_s^2 (1 - p_s)^{n-2} \right]$$

En substituant les espérances et en réarrangeant:

$$\mathbb{E}(S_n^0) \geq \frac{n-1}{n} \frac{[\mathbb{E}(S_n^1)]^2}{2\mathbb{E}(S_n^2)}$$



# Estimateur

Estimateur  
Chao1

Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

L'estimateur est obtenu en remplaçant les espérances par les valeurs observées:

$$\hat{S}_{Chao1} = s_{obs} + \frac{(n-1)(s_n^1)^2}{2ns_n^2}$$

# Usage

Introduction  
Eric Marcon

Introduction

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

Il s'agit d'un estimateur minimum : l'espérance du nombre d'espèces est supérieure ou égale au nombre estimé.

L'estimation est bonne tant que l'inventaire n'est pas trop sous-échantillonné.

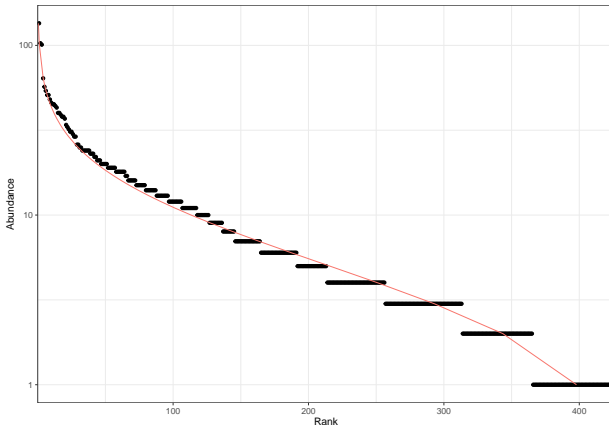
Règle empirique (Brose, Martinez, and Williams 2003) : pas plus d'un tiers des espèces observées une seule fois. Au-delà : sous estimation importante.

## Section 3

# Application

# Simulation d'un inventaire

Communauté log-normale de 500 espèces, comparable à la forêt de Paracou. Echantillon de 4000 arbres (6 ha de forêt).



# Estimation

Estimateur  
Chao1

**Eric Marcon**

Introduction

Construction  
de l'estimateur

**Application**

Nombre d'espèces observées : 426,

dont singletons : 61,

et doubletons : 52.

Estimateur Chao1 : 462 espèces.

# Test de l'estimateur

Eric Marcon

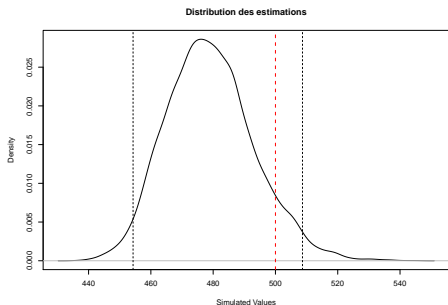
Introduction  
Construction  
de l'estimateur

Application

Simulation d'un grand nombre d'inventaires (10000) et estimation de la richesse à chaque simulation.

Le biais  $b$  est l'écart entre l'estimation moyenne et la vraie valeur : **-21** espèces.  
La variance empirique de l'estimateur est  $\sigma^2$ .

L'erreur moyenne attendue de l'estimateur est  $\sqrt{b^2 + \sigma^2}$ , exprimée en pourcentage de la valeur réelle : **5%**.



# Sous-échantillonnage

Eric Marcon

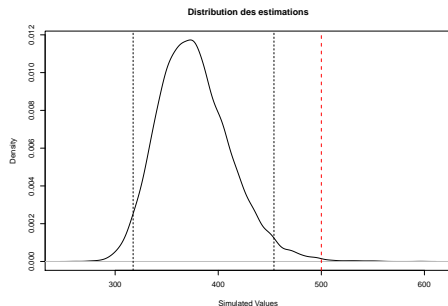
Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

En limitant l'inventaire  
600 arbres, environ 1 ha,  
la sous-estimation  
devient forte.  
L'erreur moyenne est  
maintenant : **26%**.



# Et Paracou ?

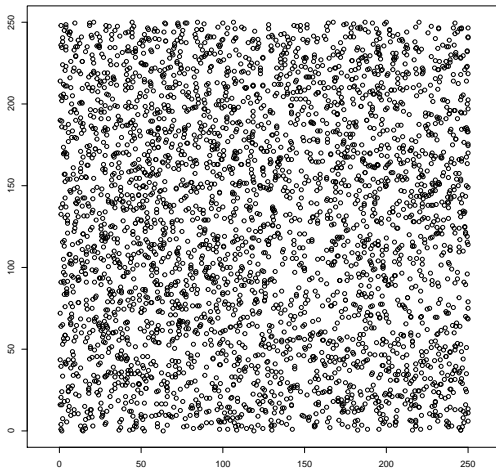
Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

6,25 ha  
inventoriés,  
environ 4000  
arbres.  
Le nombre  
d'espèces  
observées est 334,  
dont 98 singletons.  
L'estimateur  
Chao1 donne 415  
espèces.





# Conclusion

Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

L'estimation de la richesse à partir d'un échantillon est possible sans faire aucune supposition sur la distribution des probabilités.

Les estimateurs de ce type sont dits "non-paramétriques". Ils sont bien supérieurs aux autres approches (estimateurs paramétriques ou extrapolation de la courbe aire-espèce).

L'estimateur de Chao est le plus connu. Il est très efficace quand l'échantillonnage est suffisant (moins d'un tiers de singletons).

Pour en savoir plus : Mesures de la biodiversité  
(<https://hal-agroparistech.archives-ouvertes.fr/cel-01205813>)

# References

Introduction  
Chao1

Eric Marcon

Introduction

Construction  
de l'estimateur

Application

Ce document est entièrement reproductible grâce à RMarkdown. Son code source est hébergé sur GitHub : <https://github.com/EricMarcon/Chao1>.

## Bibliographie :

Brose, Ulrich, Neo D. Martinez, and Richard J. Williams. 2003. "Estimating species richness: Sensitivity to sample coverage and insensitivity to spatial patterns." *Ecology* 84 (9): 2364–77. <https://doi.org/10.1890/02-0558>.

Chao, Anne. 2004. "Species richness estimation." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, edited by N Balakrishnan, C B Read, and B Vidakovic, 2nd ed. New York: Wiley.